

Modulación Digital

Comunicaciones Eléctricas

Leslie Murray

leslie@eie.fceia.unr.edu.ar

Área de Comunicaciones Eléctricas

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

Montar Información de Carácter Digital
sobre una Portadora Senoidal

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora
- Afectando la *frecuencia* de la portadora

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora
- Afectando la *frecuencia* de la portadora

¿Para qué?

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora
- Afectando la *frecuencia* de la portadora

¿Para qué?

- Para compartir un canal

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora
- Afectando la *frecuencia* de la portadora

¿Para qué?

- Para compartir un canal
- Para llevar una señal a f compatibles con el medio de T_x

Montar Información de Carácter Digital sobre una Portadora Senoidal

- Afectando la *amplitud* de la portadora
- Afectando la *fase* de la portadora
- Afectando la *frecuencia* de la portadora

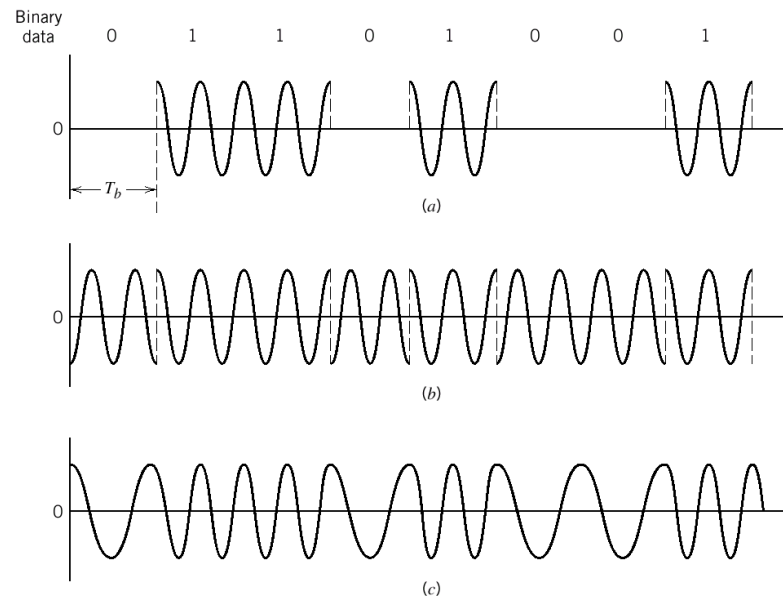
¿Para qué?

- Para compartir un canal
- Para llevar una señal a f compatibles con el medio de T_x

Similares propósitos que la Modulación Continua

Figure 6.1

Illustrative waveforms for the three basic forms of signaling binary information. (a) Amplitude-shift keying. (b) Phase-shift keying. (c) Frequency-shift keying with continuous phase.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

Modelo de Transmisión Digital

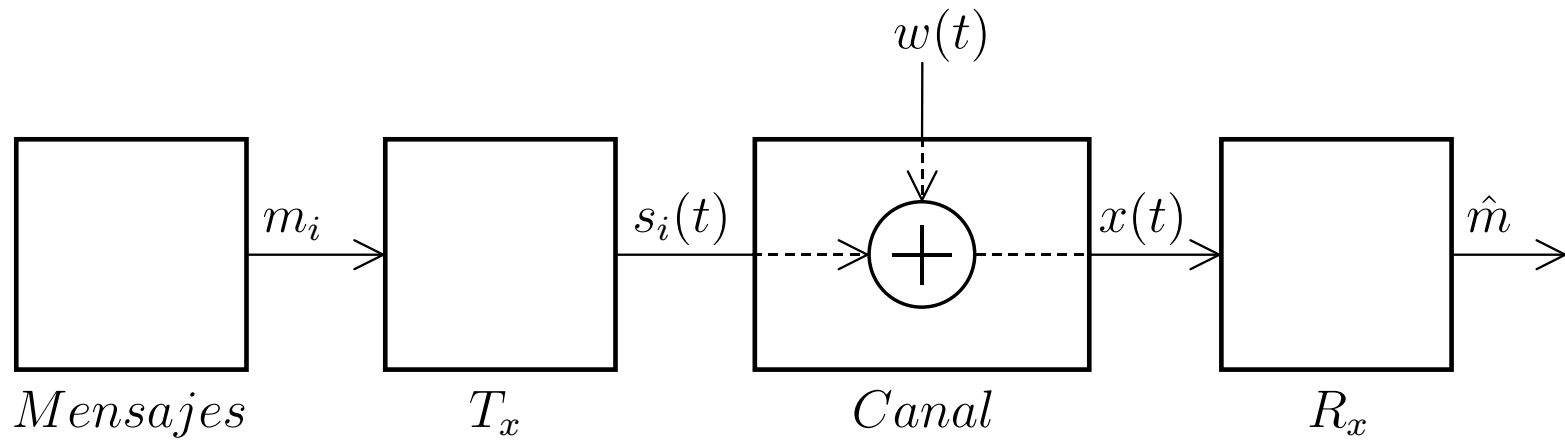
$\{m_1, m_2, \dots, m_M\}$ = Conjunto de símbolos a transmitir
a razón de uno cada T seg.

$$m_i \xrightarrow{T_x} s_i(t) \xrightarrow{C} x(t) = s_i(t) + w(t) \xrightarrow{R_x} \hat{m}_i$$

Una estimación del símbolo m_i transmitido

$w(t)$: Una realización de *AGWN* (Ruido Blanco Aditivo Gaussiano)

Diagrama en Bloques

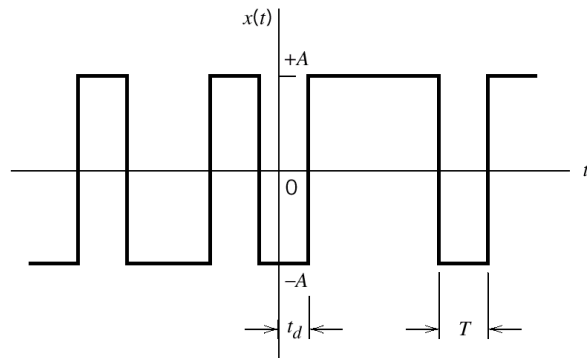


Un resultado Importante

Chapter 1: Random Processes

Figure 1.6

Sample function of random binary wave.



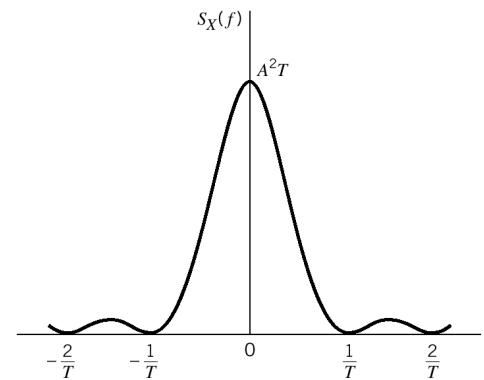
©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \downarrow \\ y(t) = x(t) \cos 2\pi f_c t \end{array}$$

Chapter 1: Random Processes

Figure 1.11

Power spectral density of random binary wave.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

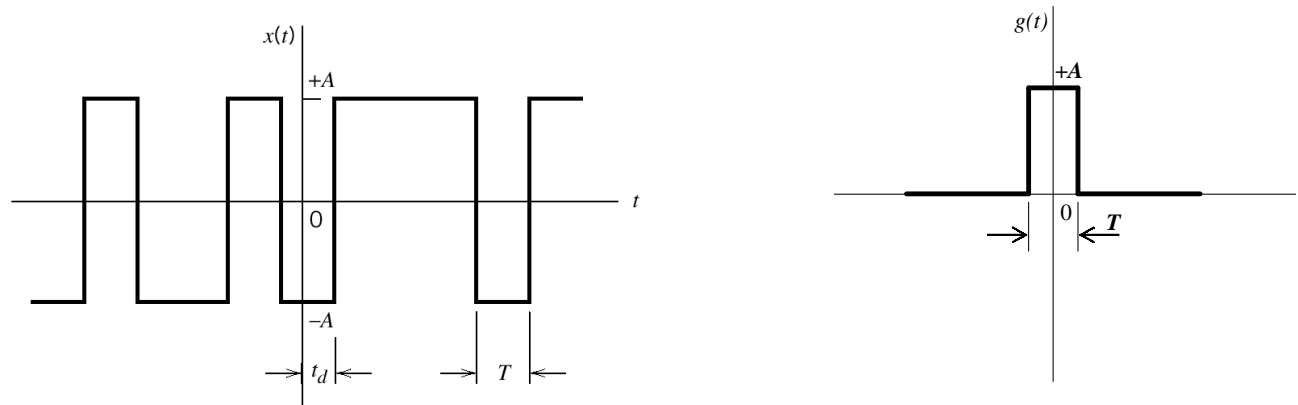
$$\begin{array}{c} S_X(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT) \\ \downarrow \\ S_Y(f) = \frac{1}{4} [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)] \end{array}$$

Otra Forma de Obtenerlo

Chapter 1: Random Processes

Figure 1.6

Sample function of random binary wave.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

$$x(t) = \pm g(t) \text{ alternando en forma aleatoria}$$

$$\mathcal{E}_g(f) = |G(f)|^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

$$S_X(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT) = \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T}$$

- Binary Phase Shift Keing = Modulación Binaria de Fase

BPSK - *Breve Descripción*

- Binary Phase Shift Keing = Modulación Binaria de Fase
- Dos símbolos \Rightarrow Dos valores de fase (0 y π)

BPSK - *Breve Descripción*

- Binary Phase Shift Keing = Modulación Binaria de Fase
- Dos símbolos \Rightarrow Dos valores de fase (0 y π)
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con fase 0 ó π

BPSK - Breve Descripción

- Binary Phase Shift Keing = Modulación Binaria de Fase
- Dos símbolos \Rightarrow Dos valores de fase (0 y π)
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con fase 0 ó π

La expresión correspondiente a una senoidal de,

- Frecuencia f_c
- Duración T_b
- Energía E_b
- Fase θ

$$\text{es: } \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

BPSK - *Definiciones*

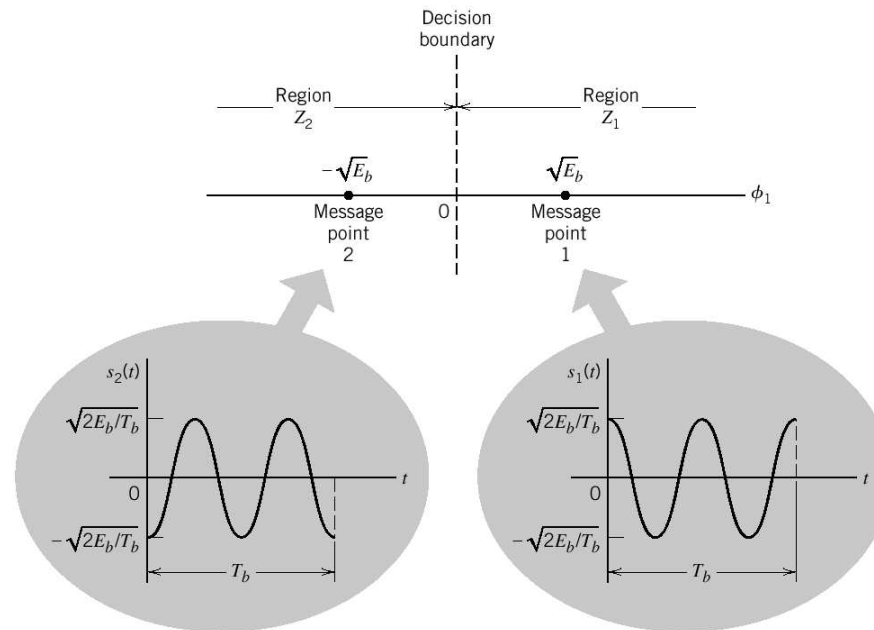
$$\begin{cases} s_1(t) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ s_2(t) &= \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$\begin{cases} s_1(t) &= s_{11}\phi_1(t) = +\sqrt{E_b} \phi_1(t) & 0 \leq t \leq T_b \\ s_2(t) &= s_{21}\phi_1(t) = -\sqrt{E_b} \phi_1(t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$

Figure 6.3

Signal-space diagram for coherent binary PSK system. The waveforms depicting the transmitted signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$, displayed in the inserts, assume $n_c = 2$.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

BPSK - Probabilidad de Error

$$x_1 = \text{Proyección de } x(t) \text{ sobre } \phi_1(t) : \int_0^{T_b} x(t)\phi_1(t) dt$$

$$x(t) = [s_i(t) + w(t)]$$

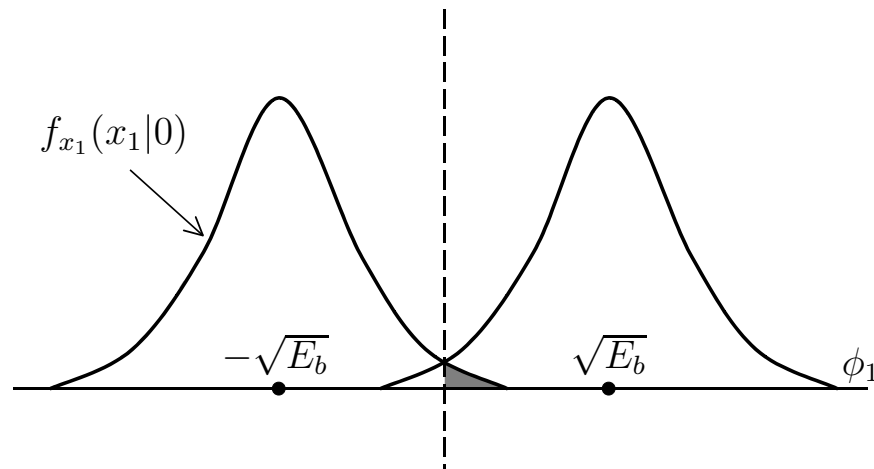
$$x_1 = \int_0^{T_b} s_1(t)\phi_1(t) dt = +\sqrt{E_b}$$

$$w(t) = 0$$

$$x_1 = \int_0^{T_b} s_2(t)\phi_1(t) dt = -\sqrt{E_b}$$

$w(t) \neq 0 \rightarrow x_1$ se distribuye en forma Gaussiana alrededor de la media

BPSK - Probabilidad de Error

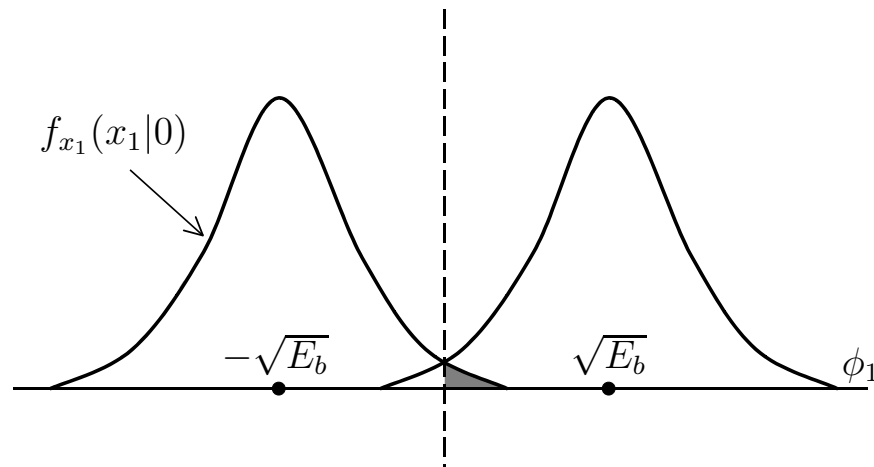


$$f_{x_1}(x_1|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} (x_1 - s_{21})^2 \right]$$

$$f_{x_1}(x_1|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} (x_1 + \sqrt{E_b})^2 \right]$$

$$p_{10} = \int_0^{\infty} f_{x_1}(x_1|0) dx_1$$

BPSK - Probabilidad de Error

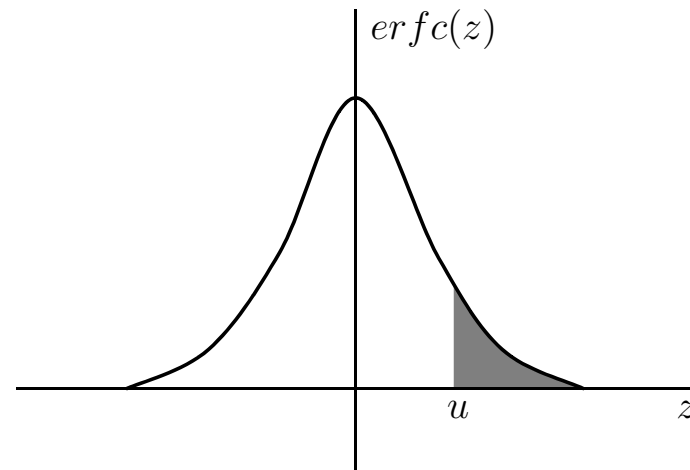


$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{N_0} (x_1 + \sqrt{E_b})^2 \right] dx_1$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{N_0}} (x_1 + \sqrt{E_b})$$

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

BPSK - *La Función erfc(u)*

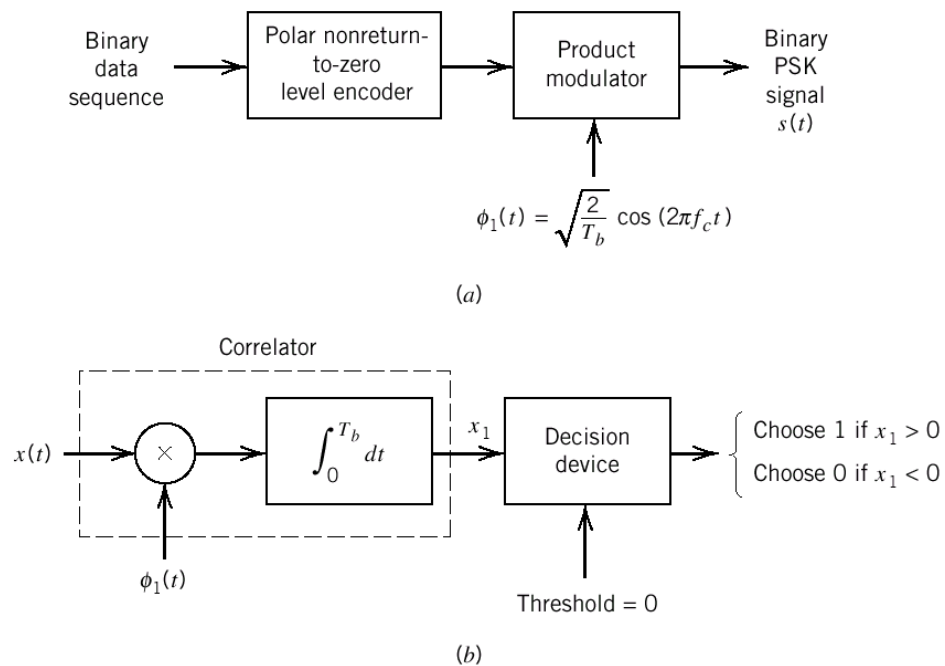


- La función $erfc(u)$ corresponde a la valuación del área de una cola Gaussiana de la forma: $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$

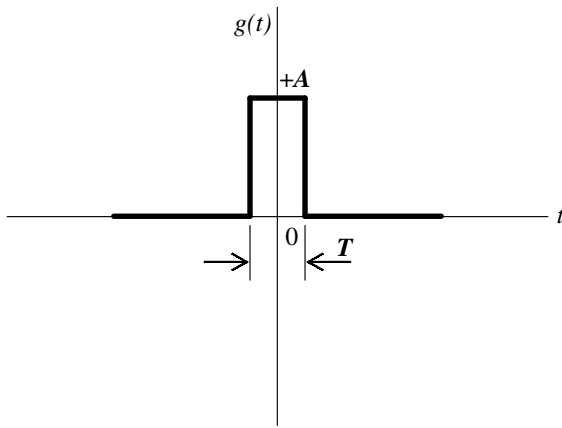
$$erfc(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-z^2) dz$$

Figure 6.4

Block diagrams for (a) binary PSK transmitter and (b) coherent binary PSK receiver.



BPSK - Densidad Espectral de Potencia

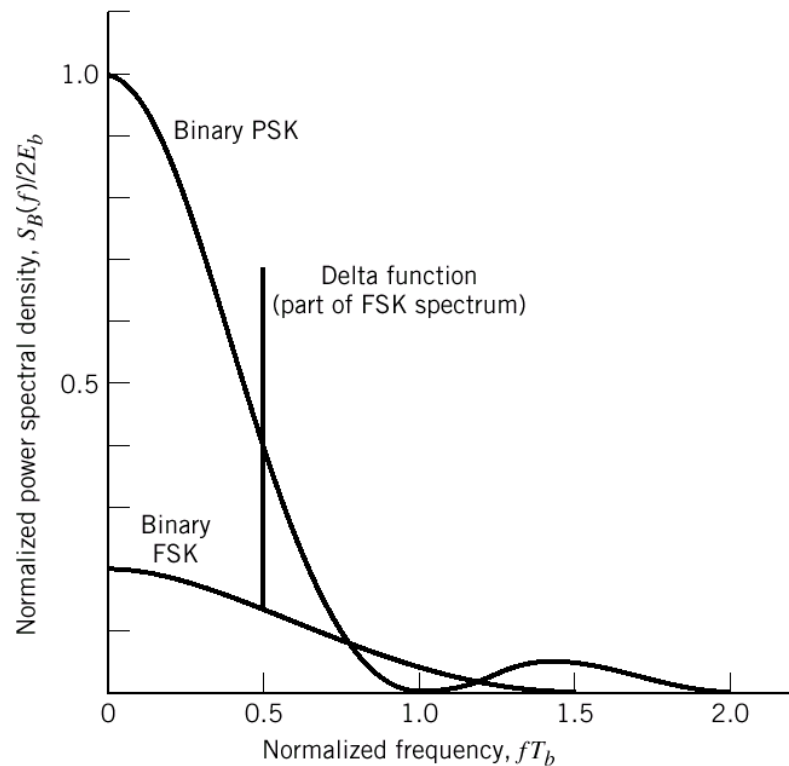


$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} & |t| \leq T_b \\ 0 & |t| > T_b \end{cases}$$

$$S_B(f) = \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T} = 2E_b \operatorname{sinc}^2(T_b f)$$

Figure 6.5

Power spectra of binary PSK and FSK signals.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

- Quadriphase Shift Keing = Modulación Cuaternaria de Fase

QPSK - *Breve Descripción*

- Quadriphase Shift Keing = Modulación Cuaternaria de Fase
- Cuatro símbolos \Rightarrow Cuatro valores de fase $(\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4})$

QPSK - Breve Descripción

- Quadriphase Shift Keing = Modulación Cuaternaria de Fase
- Cuatro símbolos \Rightarrow Cuatro valores de fase ($\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$, $7\frac{\pi}{4}$)
- En cada ranura de ancho T_b se transmite una senoidal con fase $\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$, $5\frac{\pi}{4}$ ó $7\frac{\pi}{4}$

QPSK - Breve Descripción

- Quadriphase Shift Keing = Modulación Cuaternaria de Fase
- Cuatro símbolos \Rightarrow Cuatro valores de fase $(\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4})$
- En cada ranura de ancho T_b se transmite una senoidal con fase $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}$ ó $7\frac{\pi}{4}$

Las expresiones también derivan de la forma general:

$$\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

Donde: E y T son la Energía y el Período de cada símbolo

QPSK - Definiciones

$i = 1, 2, 3, 4$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + (2i - 1) \frac{\pi}{4} \right] \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[(2i - 1) \frac{\pi}{4} \right] \cos(2\pi f_c t) \\ - \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin \left[(2i - 1) \frac{\pi}{4} \right] \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$

$$s_i(t) = s_{i1} \phi_1(t) + s_{i2} \phi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

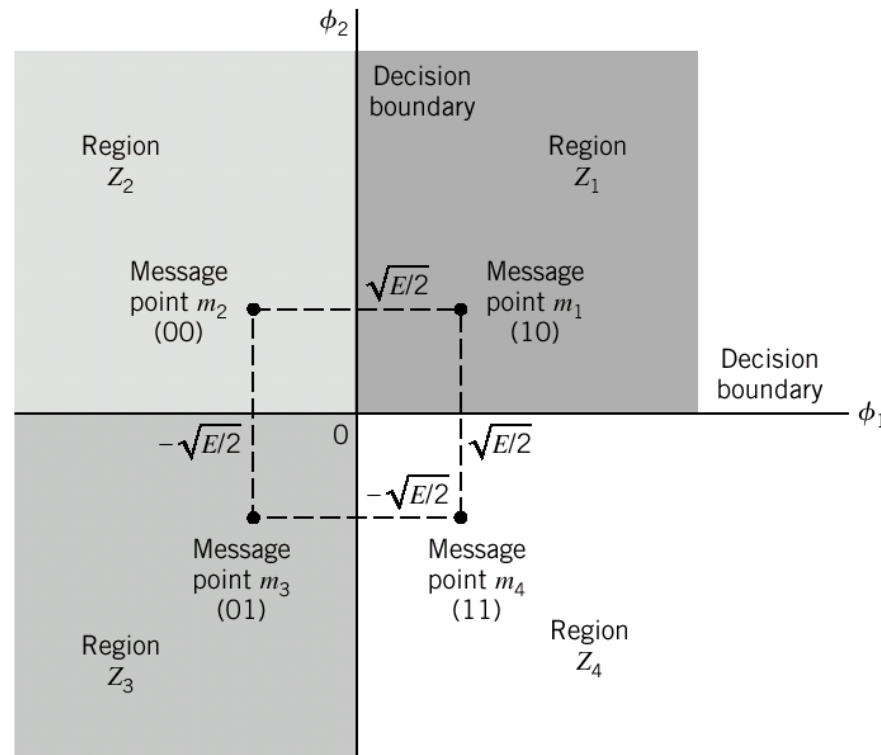
$$s_i(t) = \mp \sqrt{\frac{E}{2}} \phi_1(t) \pm \sqrt{\frac{E}{2}} \phi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

QPSK - Caracterización del Espacio de Señal

Código Gray	Fase de la Señal	s_{i1}	s_{i2}
10	$\pi/4$	$+\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
00	$3\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
01	$5\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$+\sqrt{E/2}$
11	$7\pi/4$	$+\sqrt{E/2}$	$+\sqrt{E/2}$

Figure 6.6

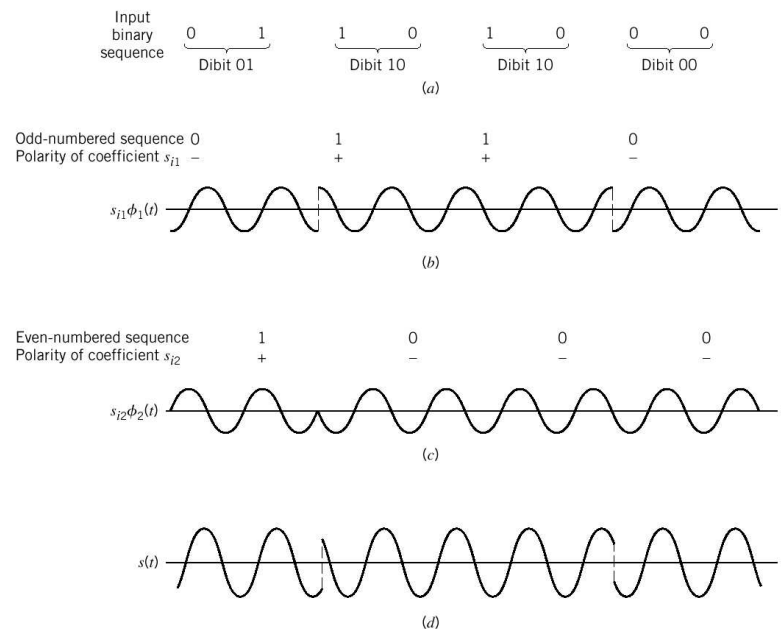
Signal-space diagram of coherent QPSK system.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

Figure 6.7

(a) Input binary sequence. (b) Odd-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (c) Even-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (d) QPSK waveform defined as $s(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)$.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

QPSK - Probabilidad de Error por Símbolo

- En un canal BPSK: $p_{10} = p_{01} = P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
- Para cada uno de los canales BPSK de QPSK:

$$P' = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right)$$

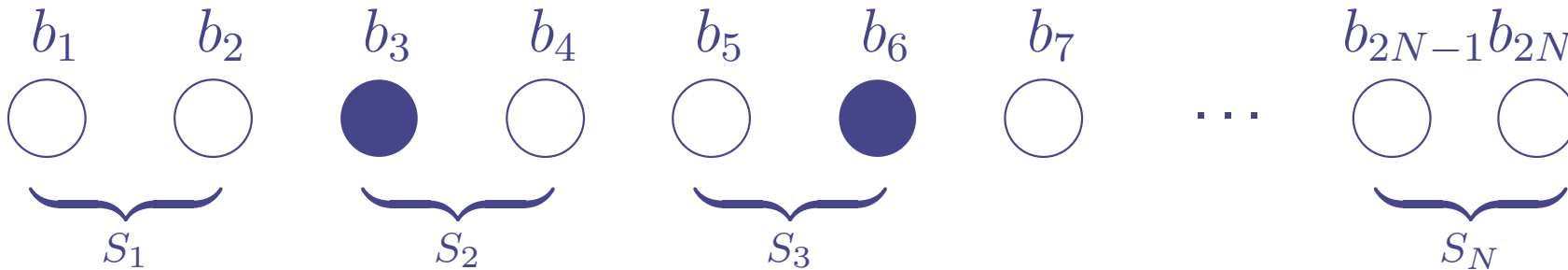
- Los errores de cada canal en QPSK (en fase y en cuadratura) son estadísticamente independientes.

$$P_c = (1 - P')^2 = 1 - 2P' + 2P'^2 \rightarrow P_e = 1 - P_c = 2P' - P'^2$$

$$P_e = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right)$$

$$P_e \approx \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right) = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

QPSK - Probabilidad o Tasa de Error por Bit (BER)



Símbolos Enviados: N
Bits Enviados: $2N$
Símbolos con error: N_e

$$P_e^S = \frac{N_e}{N}$$

Admitiendo únicamente errores de un Bit por Símbolo:

$$P_e^{Bit} = BER = \frac{\text{Bits con error}}{\text{Bits enviados}} = \frac{N_e}{2N} = \frac{P_e^S}{2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

QPSK - Observaciones sobre la BER

Tanto en QPSK como en BPSK $\rightarrow BER = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$

Para la misma relación $\frac{E_b}{N_0}$:

- **QPSK y BPSK transmiten la I_x a la misma tasa**
Un mismo mensaje “demora” el mismo tiempo en ser transmitido, ya sea mediante QPSK o BPSK
- **QPSK utiliza la mitad del Ancho de Banda que BPSK**
La señal BPSK “cambia” el doble de veces que la señal QPSK

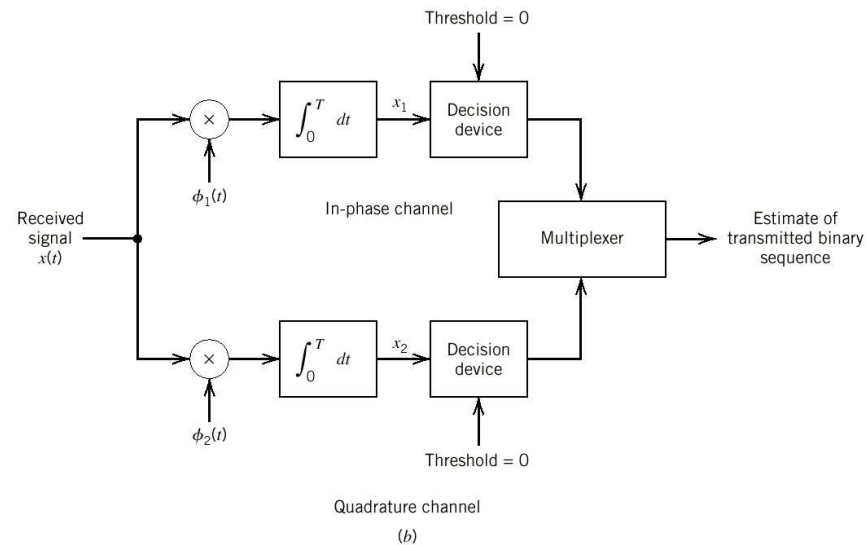
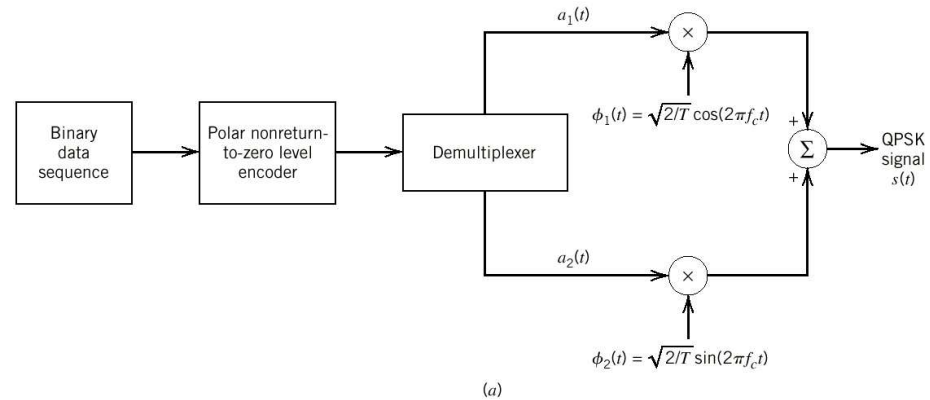
QPSK es más efectivo y por ende más utilizado que BPSK.

QPSK - Transmisor - Receptor

Chapter 6: Passband Data Transmission

Figure 6.8

Block diagrams of (a) QPSK transmitter and (b) coherent QPSK receiver.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

QPSK - *Densidad Espectral de Potencia*

Para cada canal QPSK (en fase y en cuadratura) la envolvente es

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E}{T}} & |t| \leq T_b \\ 0 & |t| > T_b \end{cases}$$

Por lo tanto

$$S(f) = E \operatorname{sinc}^2(Tf)$$

Dado que los canales son estadísticamente independientes

$$S_B(f) = 2E \operatorname{sinc}^2(Tf)$$

$$S_B(f) = 4E_b \operatorname{sinc}^2(2T_b f)$$

Más alta y más angosta que BPSK: $S_B(f) = 2E_b \operatorname{sinc}^2(T_b f)$

- Multinary Phase Shift Keing = Modulación Multinaria de Fase

M-ARY PSK - *Breve Descripción*

- Multinary Phase Shift Keing = Modulación Multinaria de Fase
- M símbolos $\Rightarrow M$ valores de fase: $\frac{2\pi}{M}(i - 1) \quad i = 1, 2, \dots, M$

M-ARY PSK - Breve Descripción

- Multinary Phase Shift Keing = Modulación Multinaria de Fase
- M símbolos $\Rightarrow M$ valores de fase: $\frac{2\pi}{M}(i - 1) \quad i = 1, 2, \dots, M$
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con fase $2(i - 1)\pi/M$

M-ARY PSK - Breve Descripción

- Multinary Phase Shift Keing = Modulación Multinaria de Fase
- M símbolos $\Rightarrow M$ valores de fase: $\frac{2\pi}{M}(i - 1) \quad i = 1, 2, \dots, M$
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con fase $2(i - 1)\pi/M$

Las expresiones derivan de la forma general:

$$\begin{cases} s_i(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i - 1) \right] & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & & \forall \text{ otro } t \end{cases}$$

M-ARY PSK - Breve Descripción

- Multinary Phase Shift Keing = Modulación Multinaria de Fase
- M símbolos $\Rightarrow M$ valores de fase: $\frac{2\pi}{M}(i - 1) \quad i = 1, 2, \dots, M$
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con fase $2(i - 1)\pi/M$

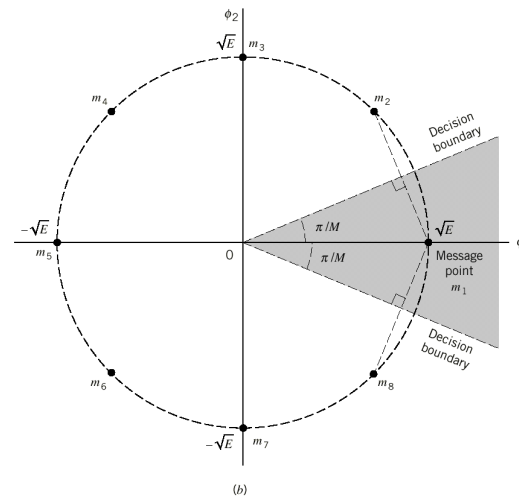
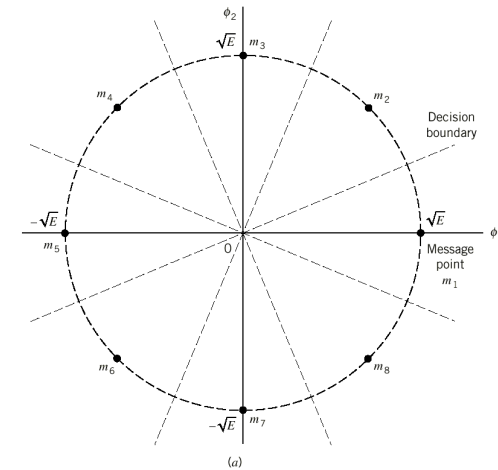
Las expresiones derivan de la forma general:

$$\begin{cases} s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i - 1) \right] & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \forall \text{ otro } t \end{cases}$$

Las señales pueden describirse en un espacio determinado por las mismas $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ que en QPSK

Figure 6.15

(a) Signal-space diagram for octaphase-shift keying (i.e., $M = 8$). The decision boundaries are shown as dashed lines. (b) Signal-space diagram illustrating the application of the union bound for octaphase-shift keying.



M-ARY PSK - Probabilidad de Error

A diferencia de QPSK, en M-ARY PSK no hay dos canales independientes. La determinación exacta del error es complicada.

$$P_{e_i} \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq i}}^M \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Aceptando sólo la influencia de los dos puntos adyacentes:

$$P_{e_i} \leq \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{2\sqrt{E} \operatorname{sen}(\pi/M)}{2\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{2\sqrt{E} \operatorname{sen}(\pi/M)}{2\sqrt{N_0}} \right) \right]$$

$$P_{e_i} \leq \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E}{N_0}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

M-ARY PSK - Probabilidad de Error

$$P_{e_i} \leq \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E}{N_0}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

$$P_e = P_{e_1} p_1 + P_{e_2} p_2 + P_{e_3} p_3 + \dots + P_{e_M} p_M$$

$$P_e = P_{e_i} \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_M)}_{=1}$$

$$P_e \leq \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E}{N_0}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

M-ARY PSK - *Densidad Espectral de Potencia*

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i - 1) \right] \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[\frac{2\pi}{M}(i - 1) \right] \cos 2\pi f_c t \\ - \sqrt{\frac{2E}{T}} \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{M}(i - 1) \right] \operatorname{sen} 2\pi f_c t \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$S_B(f) = 2E \operatorname{sinc}^2(Tf)$$

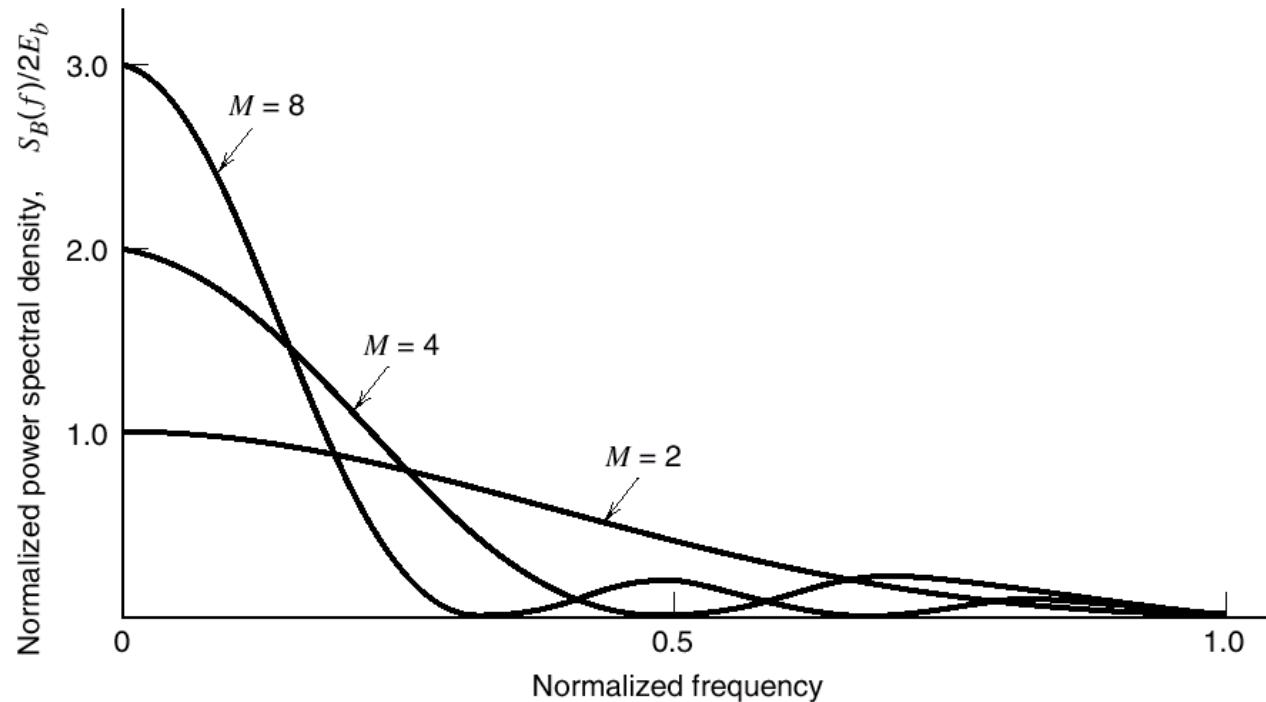
$$E = (\log_2 M) E_b$$

$$T = (\log_2 M) T_b$$

$$S_B(f) = 2 \log_2 M E_b \operatorname{sinc}^2(\log_2 M T_b f)$$

Figure 6.16

Power spectra of M -ary PSK signals for $M = 2, 4, 8$.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

M-ARY PSK - Eficiencia del Ancho de Banda

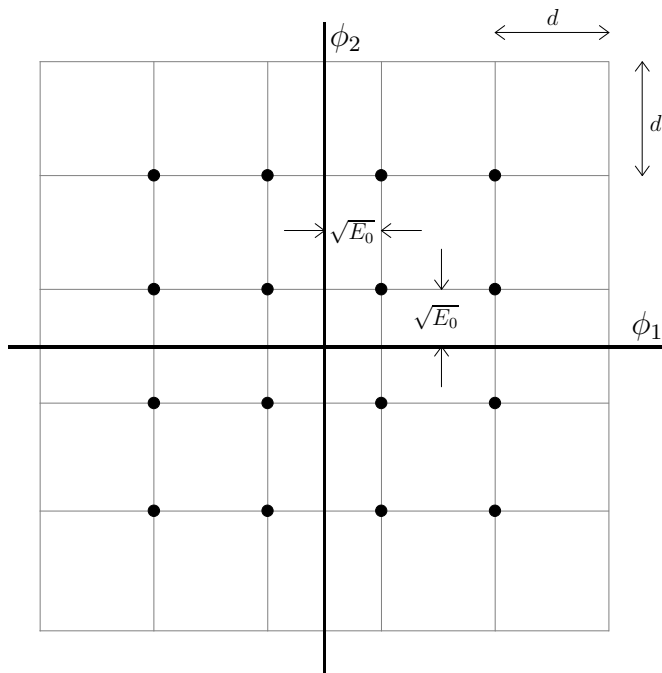
$$B = \frac{2}{T} = \frac{2}{\log_2 M T_b} = \frac{2R_b}{\log_2 M} \quad R_b : \text{tasa de bits}$$

$$\rho = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2 M}{2}$$

M	2	4	8	16	32	64
ρ (bits/s/Hz)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0

QAM - Breve Descripción

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$



$$\dot{s}_i \leftrightarrow \left(a_i \frac{d}{2}, b_i \frac{d}{2} \right) = \left(a_i \sqrt{E_0}, b_i \sqrt{E_0} \right)$$

$$a_i = \pm 1, \pm 3, \dots \quad \text{y} \quad b_i = \pm 1, \pm 3, \dots$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i (\cos 2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i (\sin 2\pi f_c t)$$

QAM - Constelaciones

En general para sistemas digitales de M símbolos, $M = 2^K$

- **Caso 1:** Constelación Cuadrada, $L = \sqrt{M}$ es entero

$$L = \sqrt{M} = M^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{K}{2}} \quad \text{K debe ser par}$$

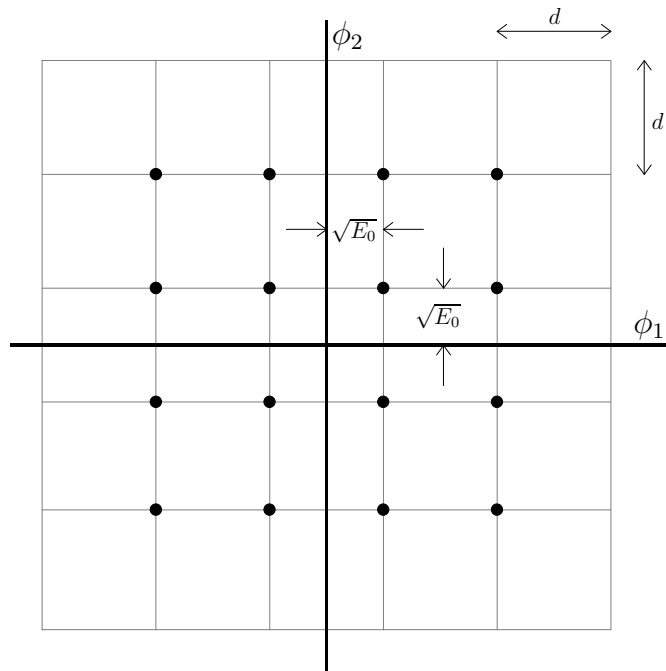
- **Caso 2:** Constelación en Cruz, $L = \sqrt{M}$ no es entero

Ejemplo:

$$M = 256 \text{ símbolos} \leftrightarrow K = 8 \text{ bits} \quad (256 = 2^8)$$

$$L = \sqrt{M} = \sqrt{256} = 16 \rightarrow \text{Reja cuadrada de } 16 \times 16 \text{ puntos}$$

QAM - Constelación Cuadrada



$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_i(\cos 2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_i(\sin 2\pi f_c t)$$

$$(a_i, b_i) = \begin{bmatrix} (-3, 3) & (-1, 3) & (1, 3) & (3, 3) \\ (-3, 1) & (-1, 1) & (1, 1) & (3, 1) \\ (-3, -1) & (-1, -1) & (1, -1) & (3, -1) \\ (-3, -3) & (-1, -3) & (1, -3) & (3, -3) \end{bmatrix}$$

QAM - Constelación Cuadrada

Caso General:

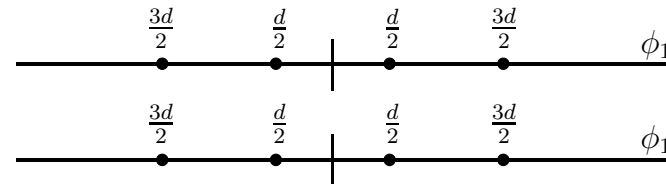
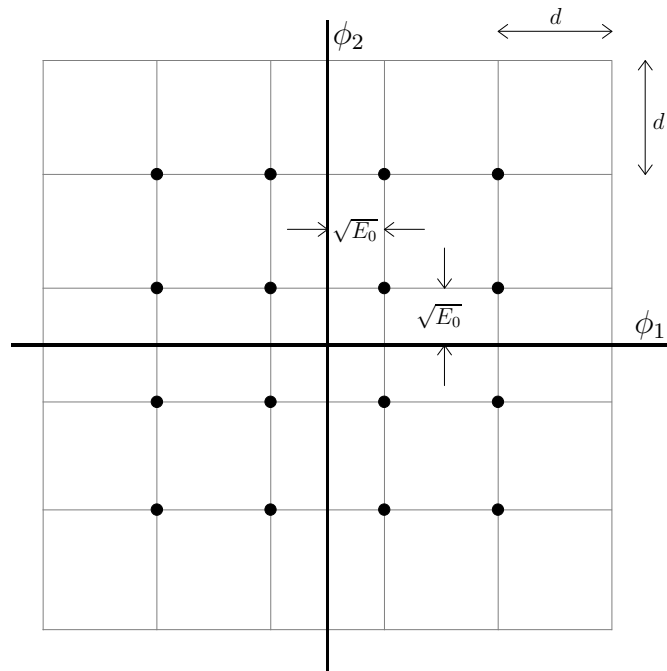
$$(a_i, b_i) = \begin{bmatrix} (-L + 1, L - 1) & (-L + 3, L - 1) & \cdots & (L - 1, L - 1) \\ (-L + 1, L - 3) & (-L + 3, L - 3) & \cdots & (L - 1, L - 3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-L + 1, -L + 1) & (-L + 3, -L + 1) & \cdots & (L - 1, -L + 1) \end{bmatrix}$$

Resultado del Producto Cartesiano entre dos sistemas L-ARY PAM:

$$a_i = \left[(-L + 1) \quad (-L + 3) \quad \cdots \quad (L - 1) \right]$$

$$b_i = \left[(-L + 1) \quad (-L + 3) \quad \cdots \quad (L - 1) \right]$$

QAM - Constelación Cuadrada

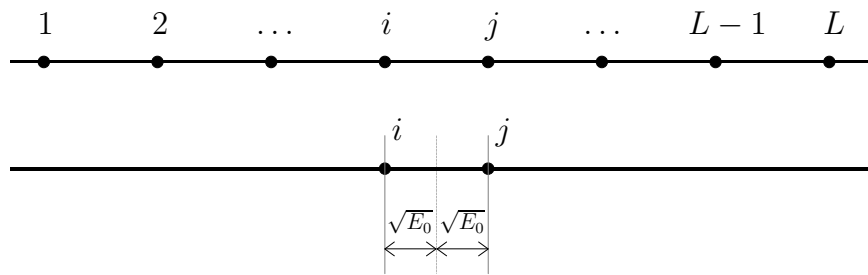


Aceptando la independencia estadística entre los sistemas lineales

$$P_c = P_c' = (1 - P_e')^2 = 1 - 2P_e' + P_e'^2 \rightarrow \underbrace{(1 - P_c)}_{P_e} \approx 2P_e'$$

Donde P_e' es la Probabilidad de error por cada sistema L-ARY PAM

M-ARY PAM - Probabilidad de Error



$$P_{e_i} = P_{e_j} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right)$$

$$P'_e = \sum_{k=1}^L p_k P_{e_k} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L P_{e_k} = \frac{1}{L} \left[P_{e_1} + P_{e_L} + \sum_{k=2}^{L-1} P_{e_k} \right]$$

$$P'_e = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right) + \sum_{k=2}^{L-1} 2 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right) \right]$$

$$P'_e = \frac{1}{L} \left[(L-1) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right) \right] = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right)$$

QAM - Constelación Cuadrada

$$P_e \approx 2 P'_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right)$$

Si las L amplitudes de componentes en fase y cuadratura son equiprobables, un valor promedio de energía, E_{av} , resulta:

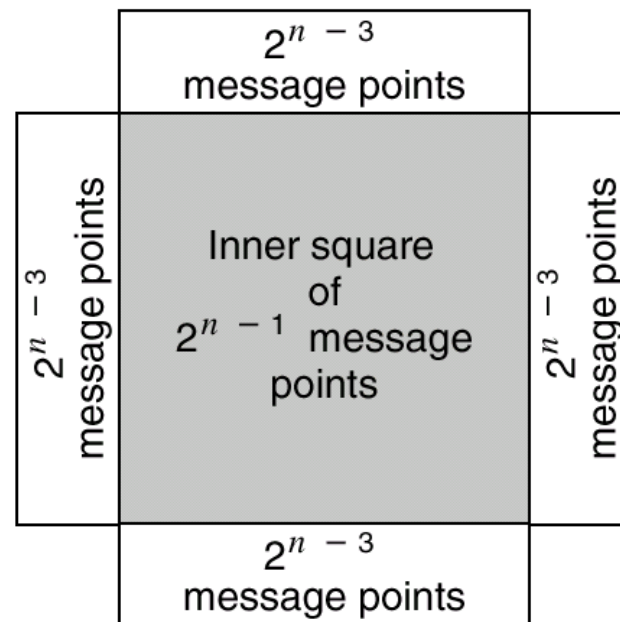
$$E_{av} = 2 \left[\frac{2E_0}{L} \sum_{k=1}^{L/2} (2k-1)^2 \right] = \frac{2(L^2-1)E_0}{3} = \frac{2(M-1)E_0}{3}$$

Y la Probabilidad de Error del esquema QAM:

$$P_e \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{2(M-1)N_0}} \right)$$

Figure 6.18

Illustrating how a square QAM constellation can be expanded to form a QAM cross-constellation.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

QAM - Constelación en Cruz

K es impar $\rightarrow L = \sqrt{M}$ no es entero.

$$P_e \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2M}} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right)$$

Aproximación válida si $\frac{E_0}{N_0}$ es alto.

- Binary Frequency Shift Keing = Modulación Binaria de Frecuencia

BFSK - *Breve Descripción*

- Binary Frequency Shift Keing = Modulación Binaria de Frecuencia
- Dos símbolos \Rightarrow Dos frecuencias (f_1 y f_2)

BFSK - *Breve Descripción*

- Binary Frequency Shift Keing = Modulación Binaria de Frecuencia
- Dos símbolos \Rightarrow Dos frecuencias (f_1 y f_2)
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con frecuencia f_1 ó f_2

BFSK - Breve Descripción

- Binary Frequency Shift Keing = Modulación Binaria de Frecuencia
- Dos símbolos \Rightarrow Dos frecuencias (f_1 y f_2)
- En cada ranura de ancho T_b una senoidal con frecuencia f_1 ó f_2

La expresión correspondiente a una senoidal de,

- Frecuencia f_i $i = 1, 2$
- Duración T_b
- Energía E_b

$$\text{Es: } \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t) \quad 0 \leq t \leq T_b \quad i = 1, 2$$

BFSK - *Definiciones*

$$\begin{cases} s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) & 0 \leq t \leq T_b \\ s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$

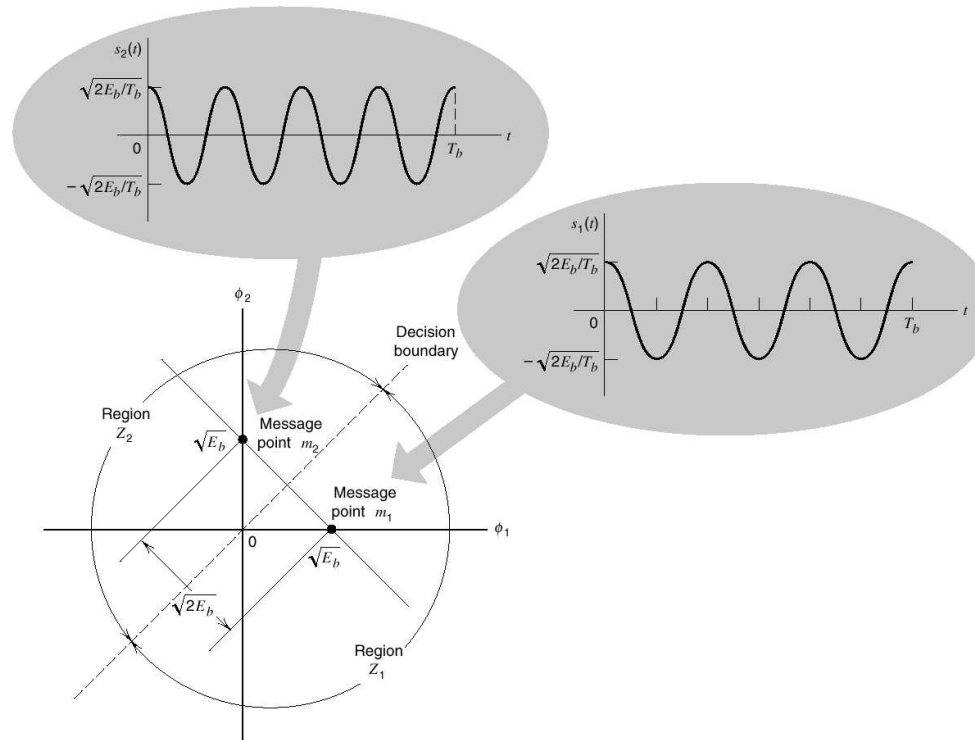
$$\begin{cases} \phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) & 0 \leq t \leq T_b \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases}$$

$$\dot{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{bmatrix}$$

$$f_i = \frac{n_c + i}{T_b} \quad n_c \text{ entero}, \quad i = 1, 2 \quad \leftarrow \text{Sunde's FSK}$$

Figure 6.25

Signal-space diagram for binary FSK system. The diagram also includes two inserts showing example waveforms of the two modulated signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

BFSK - Composición de las Señales

Las componentes de la señal transmitida $s_i(t)$ serán 0 y $\sqrt{E_b}$

$$s_1(t) \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2(t) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{E_b} \end{bmatrix}$$

El vector de observación $x(t)$ también tendrá dos componentes

$$x(t) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_1 = \int_0^{T_b} x(t)\phi_1(t)dt$ y $x_2 = \int_0^{T_b} x(t)\phi_2(t)dt$, que en “el mejor de los casos” se corresponderán con 0 y $\sqrt{E_b}$, según $s_i(t)$ sea $s_1(t)$ o $s_2(t)$

BFSK - Probabilidad de Error

- Regiones de decisión:

$$x_1 > x_2, \quad x_1 < x_2 \quad \text{y} \quad x_1 = x_2 \quad \text{para la frontera.}$$

- Sea $y = x_1 - x_2$ una función muestra del P.A. gaussiano Y

$$\left\{ \begin{array}{l} E[Y|1] = E[X_1|1] - E[X_2|1] = +\sqrt{E_b} \\ E[Y|0] = E[X_1|0] - E[X_2|0] = -\sqrt{E_b} \\ VAR[Y] = VAR[X_1] - VAR[X_2] = N_0 \end{array} \right.$$

$$f_y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(y + \sqrt{E_b})^2}{2N_0} \right]$$

BFSK - Probabilidad de Error

$$f_y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(y + \sqrt{E_b})^2}{2N_0} \right]$$

$$p_{10} = \int_0^{\infty} f_y(y|0) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{E_b/2N_0}}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

$$z = \frac{y + \sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}}$$

Análogamente:

$$p_{01} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

Luego:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

BFSK - Transmisor - Receptor

Chapter 6: Passband Data Transmission

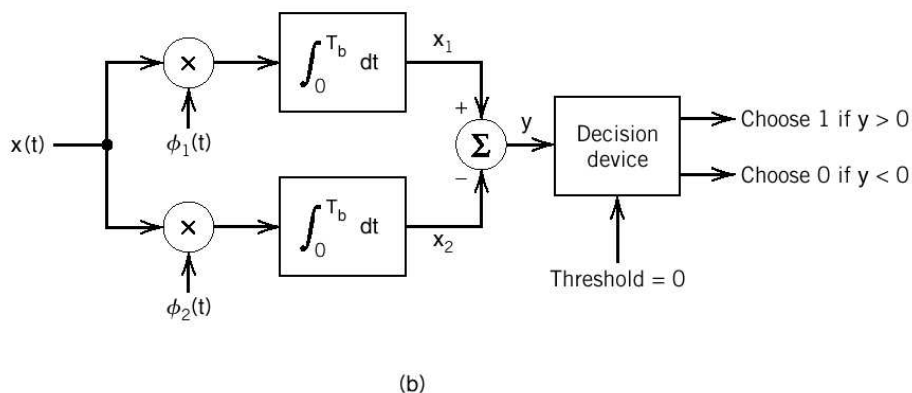
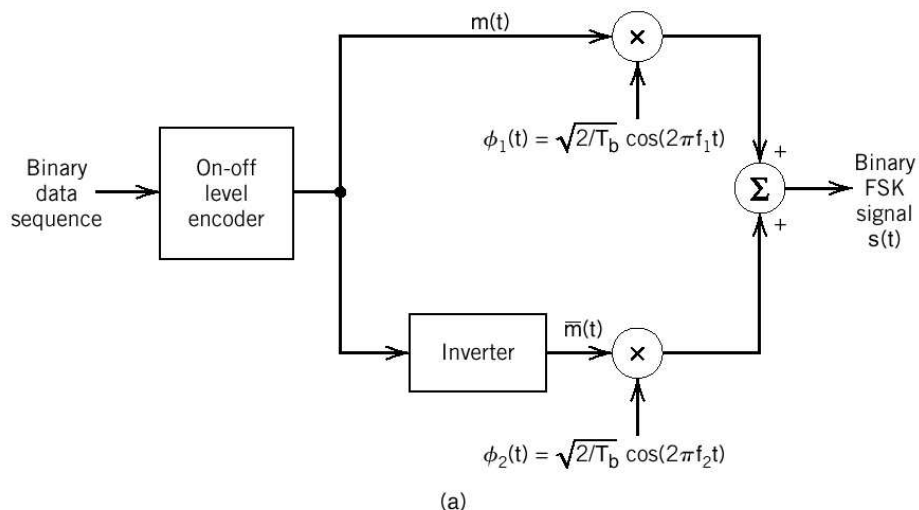


Figure 6.26
Block diagrams for (a) binary FSK transmitter and (b) coherent binary FSK receiver.

©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

BFSK - *Densidad Espectral de Potencia*

Otra forma de describir la señal BFSK:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \left(2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{T_b} \right)$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \left(2\pi f_c t \pm 2\pi \frac{1}{T_b} t \right)$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos \left[2\pi \left(f_c \pm \frac{1}{T_b} \right) t \right]$$

$$\begin{cases} f_1 = f_c - \frac{1}{2T_b} \\ f_2 = f_c + \frac{1}{2T_b} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_c = \frac{f_1 + f_2}{2} \\ f_2 - f_1 = \frac{1}{T_b} \end{cases}$$

BFSK - Densidad Espectral de Potencia

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{T_b}\right)$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\pm \frac{\pi t}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \operatorname{sen}\left(\pm \frac{\pi t}{T_b}\right) \operatorname{sen}(2\pi f_c t)$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t) - \left[\pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \operatorname{sen}(2\pi f_c t)\right]$$

- $\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \rightarrow$ Dos $\delta(f)$ en $\frac{1}{2T_b}$ y $-\frac{1}{2T_b}$

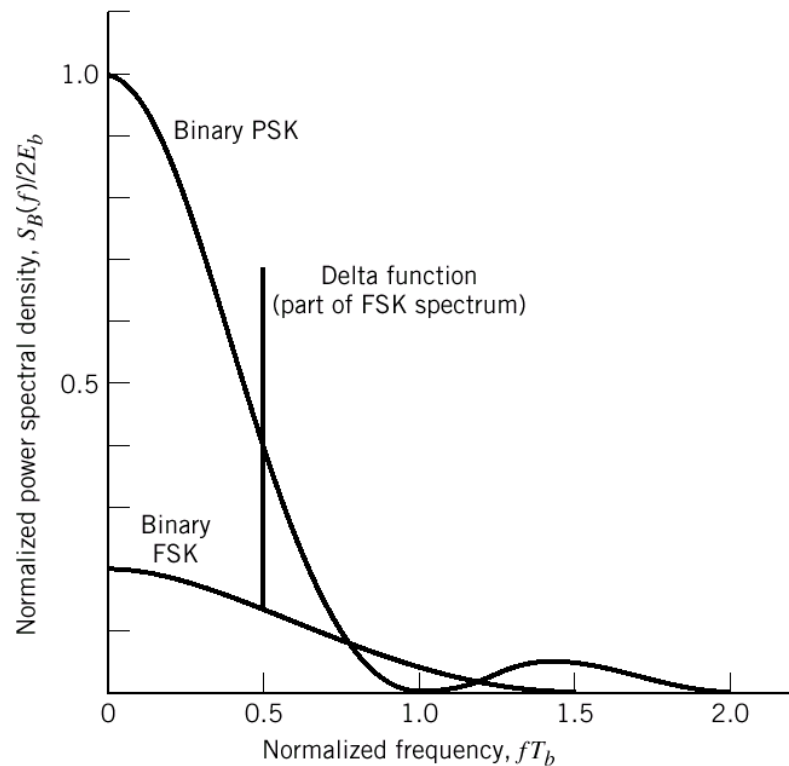
- $\pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \rightarrow g(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \\ 0 \end{cases}$

Envolvente : $\pm g(t) \rightarrow \mathcal{E}_g(f) = \frac{8E_b T_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2)}$

$$S_B(f) = \frac{E_b}{2T_b} \left[\delta\left(f - \frac{1}{2T_b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_b}\right) \right] + \frac{8E_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2)}$$

Figure 6.5

Power spectra of binary PSK and FSK signals.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

M-ARY FSK - *Definiciones*

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left[\frac{\pi}{T} (n_c + i)t \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Donde n_c es una constante entera.

$$\phi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \underbrace{\left[\frac{\pi}{T} (n_c + i)t \right]}_{2\pi \left(\frac{n_c}{2T} + \frac{i}{2T} \right) t} \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$2\pi \left(\frac{n_c}{2T} + \frac{i}{2T} \right) t$$

f_c

Separación $\frac{1}{2T}$ entre las f_i consecutivas

M-ARY FSK - Probabilidad de Error

$$\dot{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{ii} \\ \vdots \\ s_{iM-1} \\ s_{iM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{s}_j = \begin{bmatrix} s_{j1} \\ s_{j2} \\ \vdots \\ s_{jj} \\ \vdots \\ s_{jM-1} \\ s_{jM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sqrt{E} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

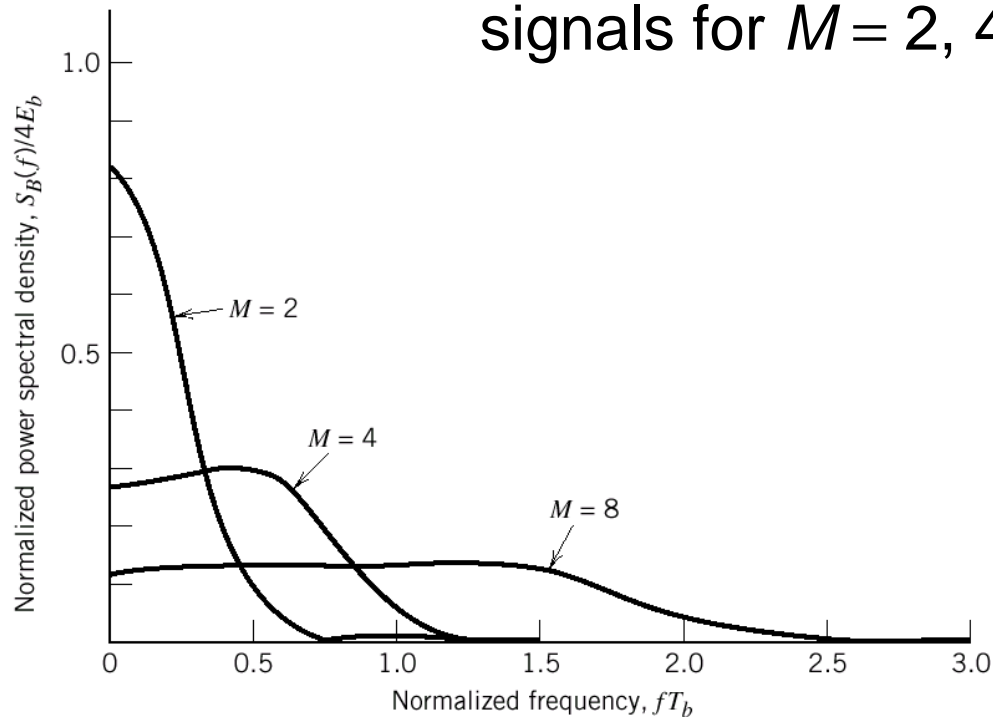
$$\|\dot{s}_i - \dot{s}_j\|^2 = \sum_{K=1}^M (s_{ik} - s_{jk})^2 = (\sqrt{E})^2 + (\sqrt{E})^2 = 2E$$

$$\|\dot{s}_i - \dot{s}_j\| = d_{min} = \sqrt{2E}$$

$$P_e \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right)$$

Figure 6.36

Power spectra of M -ary PSK signals for $M = 2, 4, 8$.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

M-ARY FSK - Eficiencia del Ancho de Banda

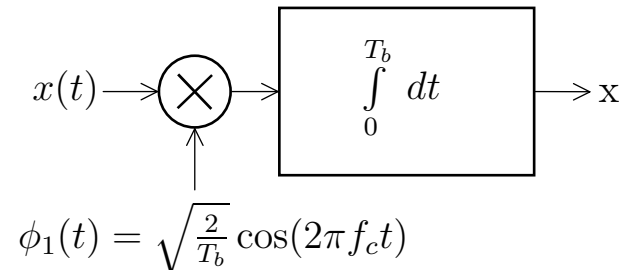
$$B = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2 (\log_2 M T_b)} = \frac{M R_b}{2 \log_2 M} \quad R_b : \text{tasa de bits}$$

$$\rho = \frac{R_b}{B} = \frac{2 \log_2 M}{M}$$

M	2	4	8	16	32	64
ρ (bits/s/Hz)	1	1	0.75	0.5	0.3125	0.1875

DPSK - Problema Introdutorio

$x(t)$: señal en el receptor, siendo $s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t)$



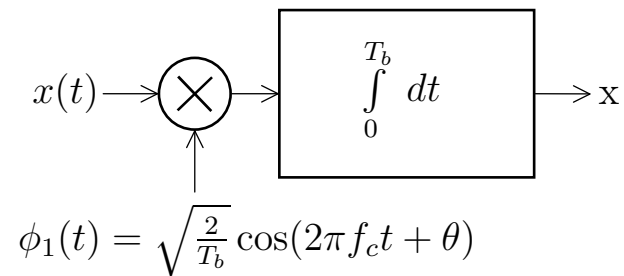
$$x = \int_0^{T_b} x(t) \phi_1(t) dt = \int_0^{T_b} [s_i(t) + w(t)] \phi_1(t) dt$$

$$x = \int_0^{T_b} s_i(t) \phi_1(t) dt \leftarrow w(t)=0$$

$$x = \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) dt$$

$$x = +\sqrt{E_b}$$

DPSK - Problema Introdutorio



$$x = \int_0^{T_b} x(t) \phi_1(t) dt = \int_0^{T_b} [s_i(t) + w(t)] \phi_1(t) dt$$

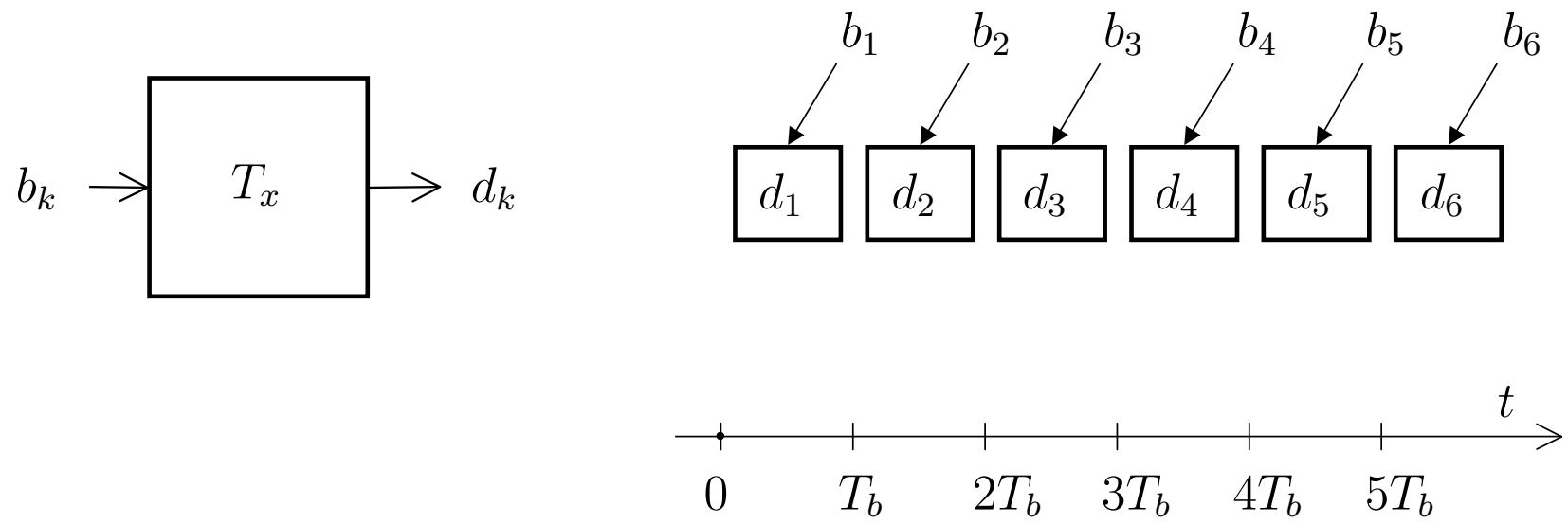
$$x = \int_0^{T_b} s_i(t) \phi_1(t) dt \leftarrow w(t)=0$$

$$x = \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta) dt$$

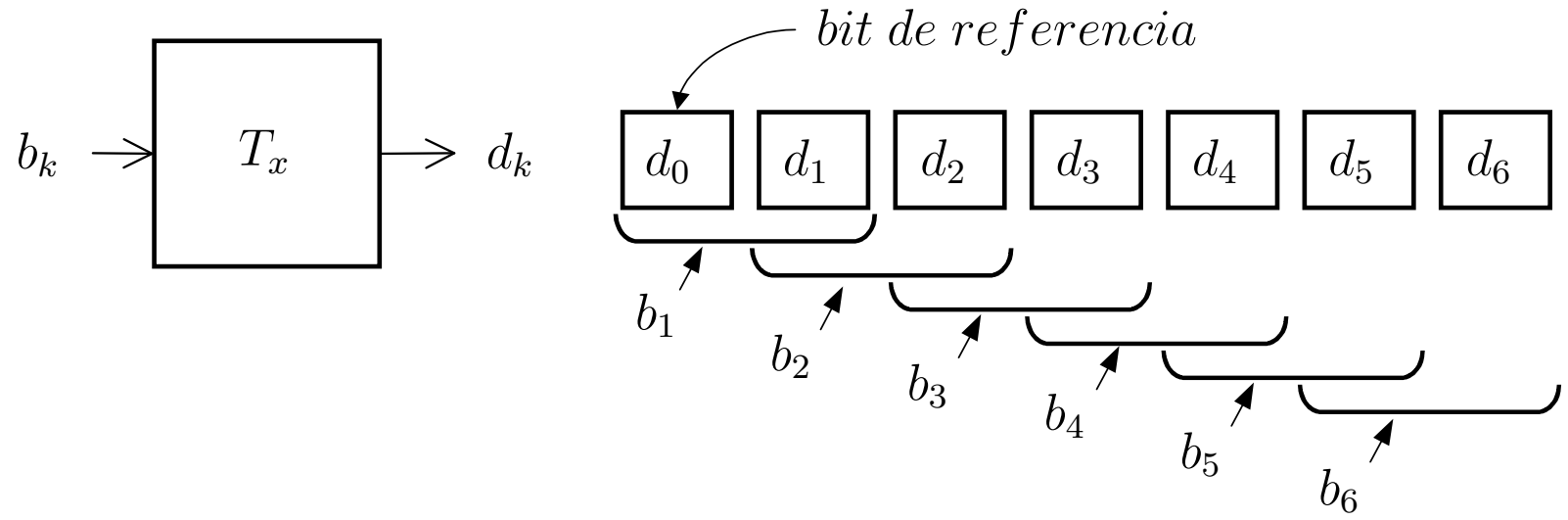
$$x = +\sqrt{E_b} \cos \theta$$

DPSK - Codificación Diferencial

BPSK



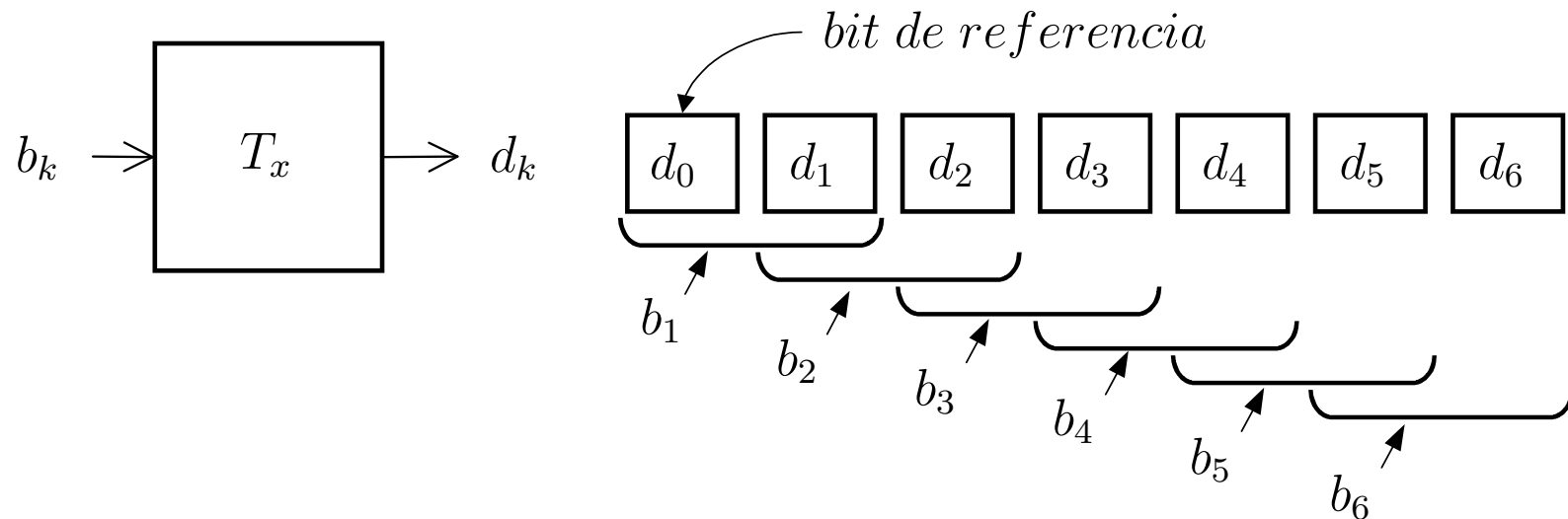
DPSK



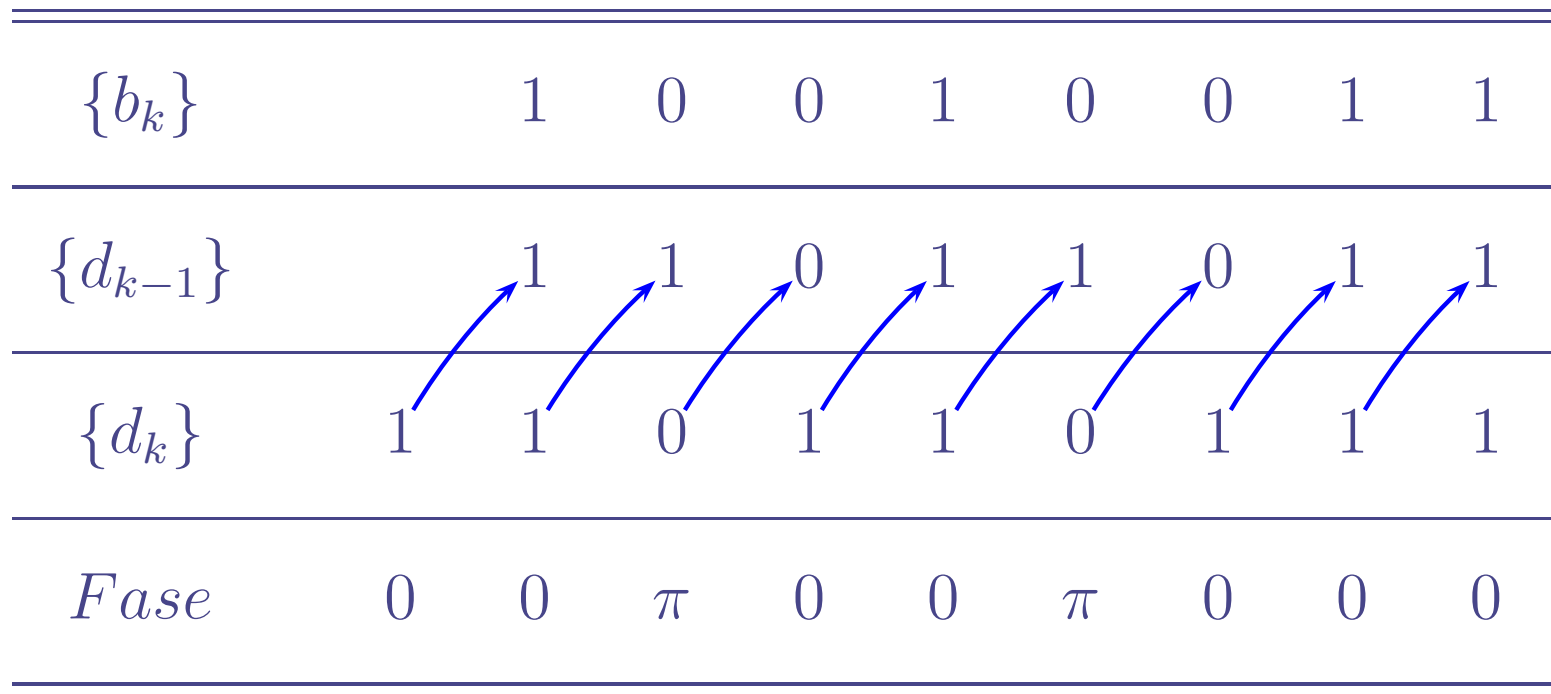
DPSK - Definiciones

$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta_1) & 0 \leq t \leq T_b \\ \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta_1) & T_b \leq t \leq 2T_b \end{cases}$$

$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta_0) & 0 \leq t \leq T_b \\ \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta_0 + \pi) & T_b \leq t \leq 2T_b \end{cases}$$



DPSK - *Generación de la Señal*



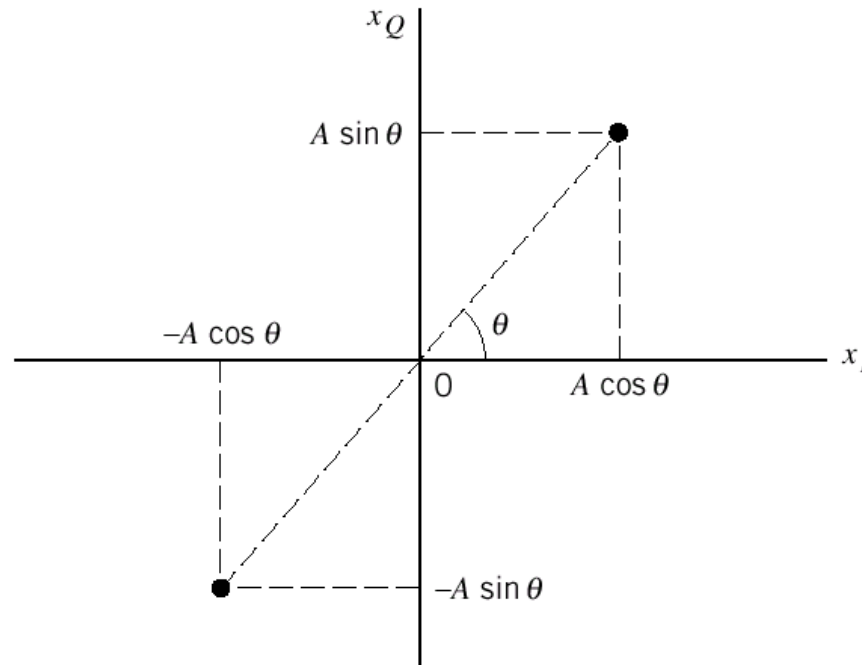
DPSK - Probabilidad de Error

- Consideradas sobre ranuras de ancho $2T_b$, las señales $s_1(t)$ y $s_0(t)$ son ortogonales
- El receptor no necesita sincronizar la fase con la fase de la señal recibida
- El esquema se encuadra en una variedad conocida como *Modulación Ortogonal No-Coherente*
- La determinación de la Probabilidad de Error se hace mediante análisis diferentes a los precedentes

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Figure 6.44

Signal-space diagram of received DPSK signal.



©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed

DPSK - Transmisor - Receptor

Chapter 6: Passband Data Transmission

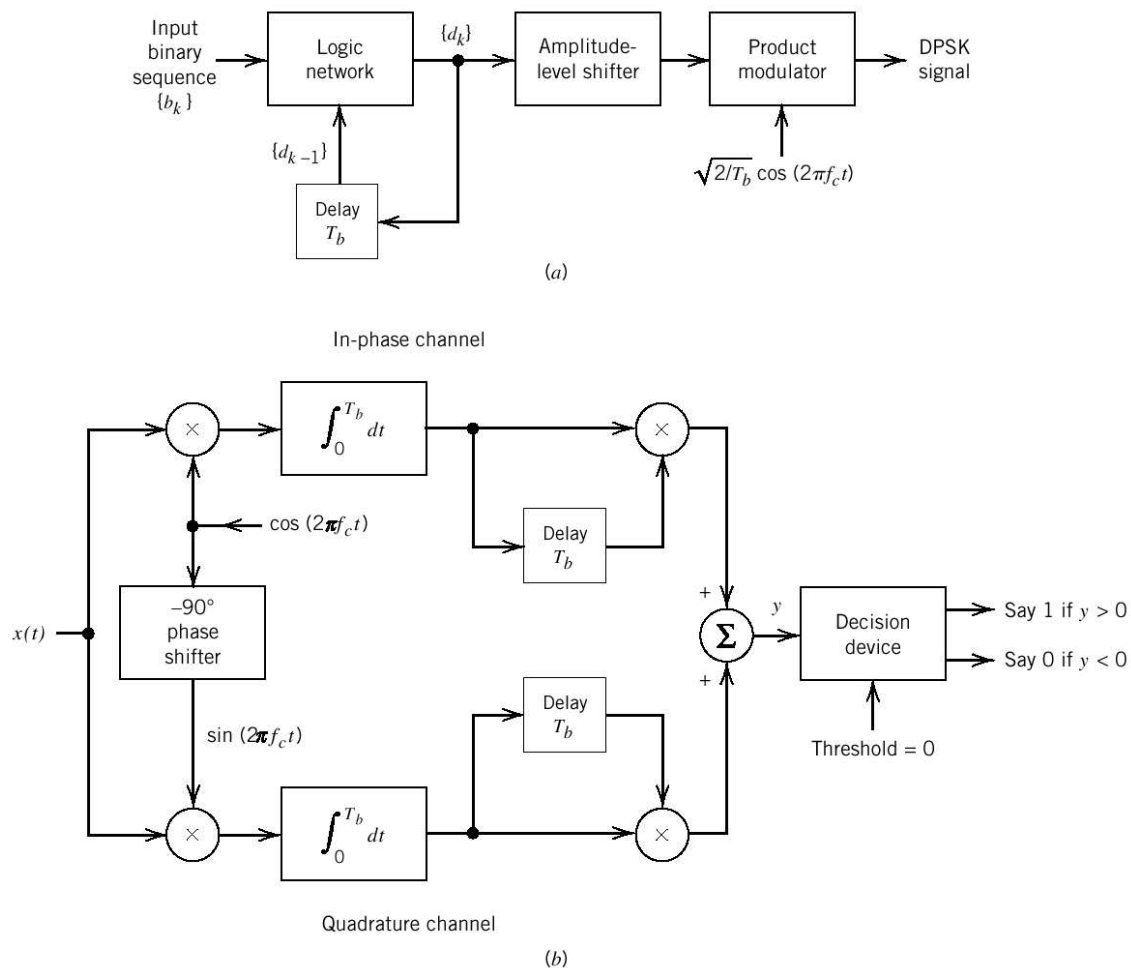


Figure 6.43
Block diagrams of (a) DPSK transmitter and (b) DPSK receiver.

©2000, John Wiley & Sons, Inc.
Haykin/Communication Systems, 4th Ed